

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

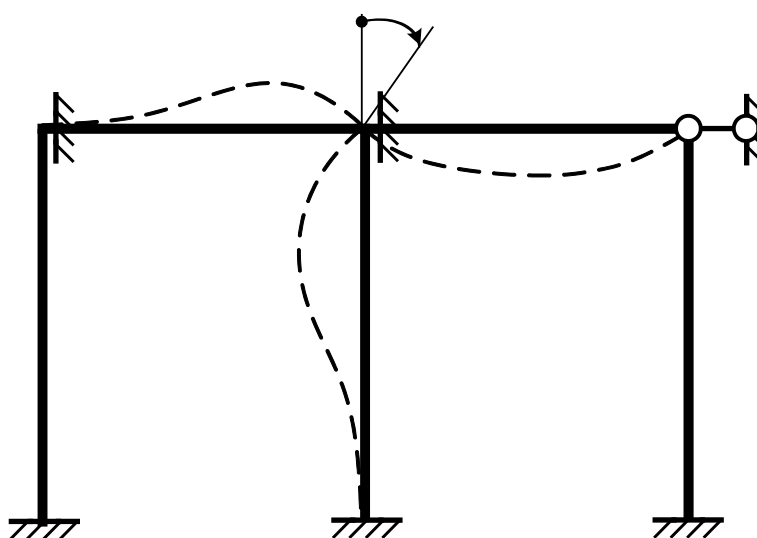
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания  
по дисциплине «Строительная механика»  
для студентов строительных специальностей  
заочной формы обучения

Часть 3

Статически неопределимые системы

Метод перемещений



Брест 2009

УДК 624.04

В методических указаниях изложены основы расчета статически неопределимых рам на действие неподвижных внешних нагрузок методом перемещений, рассмотрены принципы расчета, обсуждаются упрощения в расчетах симметричных рам, приведены примеры расчетов.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 70 03 01 «Автомобильные дороги», 70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» заочной формы обучения; могут использоваться при самостоятельном изучении курса строительной механики и при выполнении контрольных работ. Издаются в 3 частях. Часть 3.

Составитель: В.И. ИГНАТЮК, доцент, канд. техн. наук,

Рецензент: зам. директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», канд. техн. наук В. Н. ДЕРКАЧ

© Учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет», 2009

## ВВЕДЕНИЕ

Метод перемещений имеет широкое распространение, особенно при расчете сложных статических неопределимых систем с большим количеством лишних связей, обладающих малой подвижностью узлов – сложных каркасных рам, ферм с жесткими узлами и т. д. Метод перемещений явился основой для разработки ряда ценных приближенных методов расчета рам – методов Кани, Кросса и др.

Существует две формы решения задач по методу перемещений – каноническая и развернутая. Более удобной является каноническая форма метода перемещений, которая аналогична по форме записи уравнений методу сил. Свое развитие она получила в трудах Н.М. Рабиновича, А.А. Гвоздева, А.Ф. Смирнова. Ниже рассматривается именно эта форма метода перемещений.

### 1. ПОДХОДЫ И ДОПУЩЕНИЯ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

При расчете статически неопределимых систем методом сил за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, после определения которых легко находятся внутренние усилия ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) в любом сечении системы, а также может быть найдено перемещение любой точки системы.

Но задача может быть решена и в обратном направлении. Если сначала определить деформированный вид системы, то затем можно установить соответствующее им распределение внутренних сил, что иллюстрирует и широко известная зависимость

$$M = EJ \cdot y''.$$

Именно такой подход и используется в методе перемещений. При этом анализ показывает, что деформированный вид системы полностью определен, если известны угловые и линейные перемещения ее узлов. Это объясняется тем, что перемещения узлов равны перемещениям концов стержней, соединяющихся в этих узлах, а деформации стержней полностью и однозначно определяются перемещениями концов стержней. Последнее относится и к загруженным стержням, для которых, правда, деформированный вид будет зависеть дополнительно еще и от действующей нагрузки.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 1. Деформированное состояние этой рамы определяется линейными и угловыми перемещениями узлов 1 и 2; при этом число этих перемещений зависит от допущений, используемых в методе. Так, в общем случае число перемещений, определяющих деформации рамы, здесь равно пяти (рис. 1б); в случае же неучета поперечных

и продольных деформаций и неучета изменения длин стержней при их изгибе (влиянием этих величин для изгибаемых рамно-стержневых систем ввиду их малости обычно пренебрегают – классическая постановка задачи) число этих неизвестных перемещений равно двум (рис. 1в) –  $\Delta$  и  $\varphi$ .

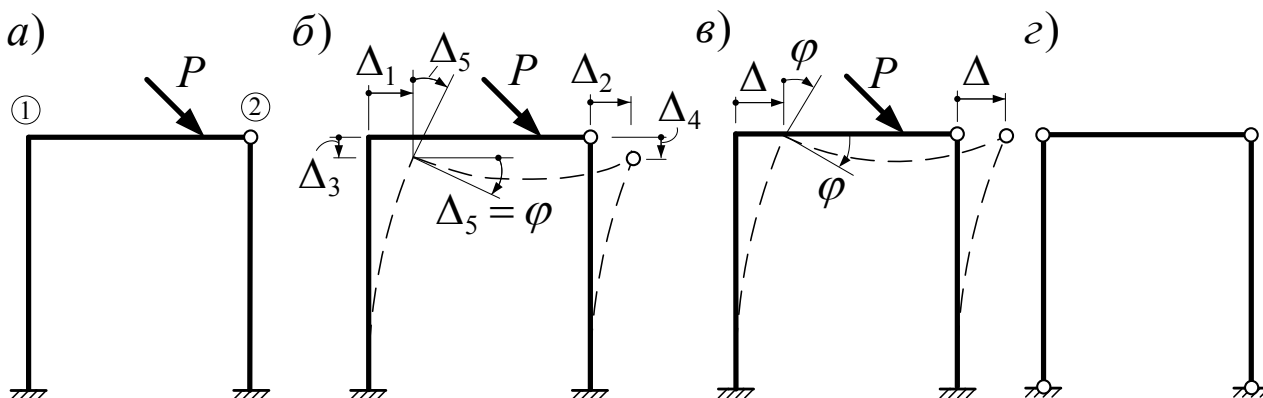


Рис. 1

❗ Число независимых угловых и линейных смещений узлов, полностью и однозначно определяющих деформированный вид системы, называется **степенью ее кинематической неопределимости**.

Все эти независимые перемещения узлов и принимаются за неизвестные в методе перемещений. Отсюда пошло и название метода – метод перемещений (деформаций).

Отметим, что в классической форме метода перемещений, как впрочем и в методе сил, для рамно-стержневых систем, как уже указывалось, используются следующие допущения:

а) пренебрегается поперечными и продольными деформациями элементов системы при ее деформировании;

б) принимается, что проекция изогнутого (деформированного) стержня на его первоначальное направление равна первоначальной длине стержня (рис. 2);

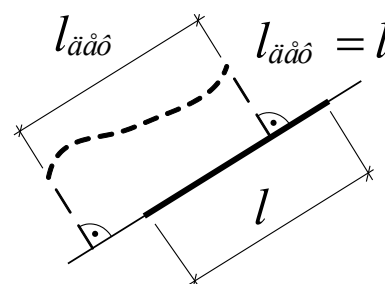


Рис. 2

в) считается, что величина углов в жестких узлах в процессе деформирования системы не изменяется;

г) углы поворота узлов и сечений стержней при деформации систем ввиду их малости принимаются равными тангенсам этих углов.

Следует отметить, что для многих статически неопределимых систем степень кинематической неопределимости ниже, чем степень статической неопределимости, а также, что метод перемещений при равном числе неизвестных несколько проще в расчете, чем метод сил.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ РАМ

Степень кинематической неопределимости системы, то есть число неизвестных независимых угловых и линейных смещений узлов, величины которых надо найти для определения деформированной схемы системы и соответственно для вычисления внутренних усилий, находится по формуле:

$$n = n_y + n_l. \quad (1)$$

Здесь  $n_y$  – число неизвестных независимых угловых смещений узлов, определяемое по числу жестких узлов метода перемещений в системе; при этом под жесткими узлами метода перемещений (далее их будем называть просто жесткими узлами) здесь понимают такие, в которых соблюдается два условия:

- в которых жестко соединяются под любым углом два и более стержня;
- в которых происходит изменение внутренних сил (изгибающих моментов), неопределяемое исходя из обычных уравнений равновесия (статики).

Например, в раме, изображенной на рис. 3а, жесткими узлами, удовлетворяющими указанным условиям, будут узлы 1, 2, 3, ( $n_y = 3$ ); для узлов же А, В, С не выполняется второе условие, так как они относятся, по существу, к статически определимым частям системы, в которых все усилия можно определить с помощью обычных методов расчета статически определимых систем.

$n_l$  – число независимых неизвестных линейных смещений узлов системы, которое можно определять двумя способами:

1. По числу возможных независимых линейных смещений жестких (см. определение  $n_y$ ) и шарнирных узлов системы на основе анализа ее возможного упругого деформирования с учетом принятых допущений (раздел 1).

Например, в раме на рис. 3а необходимо проанализировать возможность и независимость линейных смещений жестких узлов 1, 2, 3 и шарнирных узлов 4, 5 при произвольном возможном упругом деформировании этой системы:

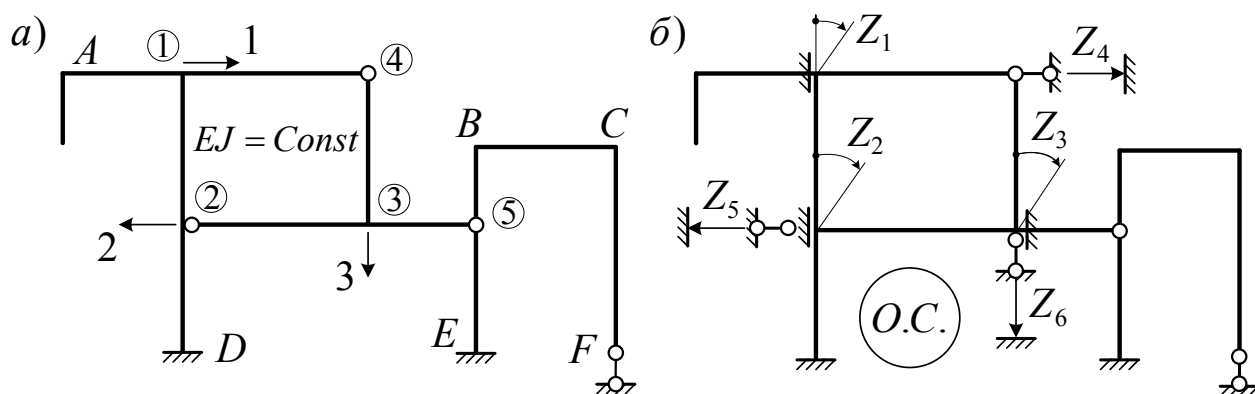


Рис. 3

– узел 1 по вертикали смещаться не может, так как он закреплен от вертикального смещения с помощью стержня 1– $D$ , который на основе допущений  $a$  и  $b$  (раздел 1) не позволяет разойтись (сойтись) точкам 1 и  $D$ , и защемления  $D$ ;

– по горизонтали узел 1 может смещаться, так как стержни 1–2 и 4–3 могут изгибаться (горизонтальное перемещение узла 1 показано стрелкой с цифрой 1);

– узел 2 по вертикали смещаться не может на основе тех же рассуждений, что и для узла 1;

– по горизонтали же узел 2 может смещаться, учитывая, что стержни 1–2, 2– $D$ , 4–3 и 5– $E$  могут изгибаться (горизонтальное смещение узла 2 обозначено стрелкой с цифрой 2);

– узел 3 по горизонтали может смещаться (по аналогии с узлом 2), но это его смещение будет таким же, как и горизонтальное смещение узла 2, так как стержень 2–3, соединяющий узлы 2 и 3, на основе допущений  $a$  и  $b$  (раздел 1), не позволяет изменяться расстоянию между этими узлами;

– по вертикали узел 3, учитывая возможность упругого деформирования стержней 1–4, 2–3 и 3–5, может смещаться (показано стрелкой с цифрой 3);

– шарнирный узел 4 в данном случае может смещаться как по горизонтали (но одинаково с узлом 1, так как стержень 1–4 на основе допущений  $a$  и  $b$  не дает возможности точкам 1 и 4 разойтись), так и по вертикали (но вместе с узлом 3 – вследствие наличия стержня 3–4);

– шарнирный узел 5 по аналогии вертикально перемещаться не может, а по горизонтали он будет смещаться на такую же величину, как узлы 2 и 3.

Таким образом, для рамы на рис. 3 имеем три независимых линейных смещения узлов ( $n_{\varepsilon} = 3$ ), а всего в итоге получаем шесть неизвестных перемещений при расчете рамы методом перемещений:

$$n = n_y + n_{\varepsilon} = 3 + 3 = 6.$$

2. В ряде учебников для определения  $n_{\varepsilon}$  предлагается формула:

$$n_{\varepsilon} = W_{\text{шарнирной схемы системы}} = 3D - 2Ш - C_0, \quad (2)$$

согласно которой  $n_{\varepsilon}$  равно степени свободы шарнирной схемы рамы, получаемой путем введения (врезания) шарниров во все жесткие узлы системы, включая опорные (в жесткие заделки).

Например, для рамы на рис. 1а шарнирная схема имеет вид, представленный на рис. 1г, в соответствии которому получим

$$n_{\varepsilon} = W_{\text{ш.сх.р.}} = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

Для рамы же на рис. 4а, шарнирная схема которой представлена на рис. 4б, будем иметь:

$$n_{\text{л}} = W_{\text{ш.сх.р.}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Однако анализ возможного деформирования рамы по первому способу показывает, что узлы 1 и 2 могут горизонтально смещаться. Таким образом, применение формулы (2) приводит здесь к неверному результату, причиной которого является мгновенная изменяемость шарнирной схемы

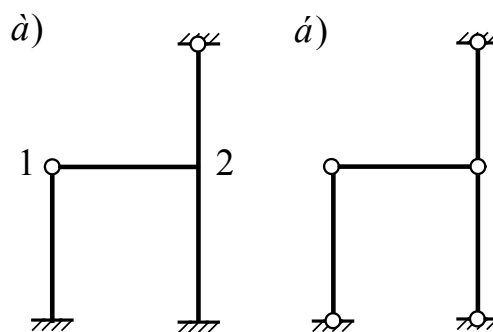


Рис. 4

рассматриваемой рамы (рис. 4б). Такая ситуация может встречаться часто и формула (2) будет всегда давать неверные результаты в случаях, когда в шарнирной схеме рамы есть мгновенная изменяемость. Поэтому при использовании формулы (2) шарнирные схемы систем необходимо проверять на мгновенную изменяемость и в случае ее наличия вносить корректировку в получаемые значения  $n_{\text{л}}$ . Учитывая, что этот вариант вычисления  $n_{\text{л}}$  достаточно сложен, им пользоваться не рекомендуется, а предлагается во всех случаях применять первый вариант определения  $n_{\text{л}}$ , который и прост, и надежен.

### 3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Основная система метода перемещений получается введением **дополнительных** связей, закрепляющих узлы от их возможных угловых и линейных смещений, которые были выявлены ранее (при определении степени кинематической неопределимости  $n$ ). То есть во все жесткие узлы, которые могут поворачиваться ( $n_{\text{у}}$ ), устанавливаются дополнительные жесткие заделки, закрепляющие их от поворота, а все узлы (жесткие и шарнирные), которые могут линейно смещаться ( $n_{\text{л}}$ ), закрепляются от этих смещений с помощью постановки дополнительных линейных связей. В качестве неизвестных при этом принимаются перемещения этих дополнительных связей (вместе, конечно, с узлами). Обозначаются эти перемещения через  $Z_i$  ( $i = 1 \dots n$ ). Следует отметить, что дополнительная заделка в отличие от действительной заделки обладает только одной связью, закрепляющей узел от поворота. При она не закрепляет узлы от линейных смещений.

Для рамы, представленной на рис. 1а, основная система (О.С.) метода перемещений имеет вид, изображенный на рис. 5.

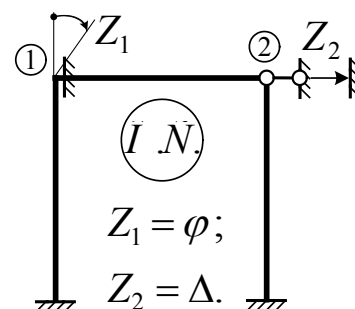


Рис. 5

С учетом принятых допущений и установленных дополнительных связей узлы основных систем метода перемещений будут неподвижными. Учитывая, что в классической форме метода перемещений пренебрегается поперечными и продольными силами, в О.С. метода перемещений далее будут строиться только эпюры изгибающих моментов. При этом воздействия на участки основной системы (внешние нагрузки, принудительные перемещения узлов) будут вызывать изгибающие моменты только на тех участках, которые непосредственно подвержены этим воздействиям, то есть через заделки в жестких узлах и шарнирные узлы основной системы воздействия изгиба передаваться не будут.

Ⓢ Таким образом, О.С. метода перемещений будет представлять собой совокупность отдельных независящих друг от друга однопролетных балочек. Эти балочки в зависимости от условий присоединения их к узлам (условий опирания) могут быть трех типов, вид которых представлен на рис. 6.

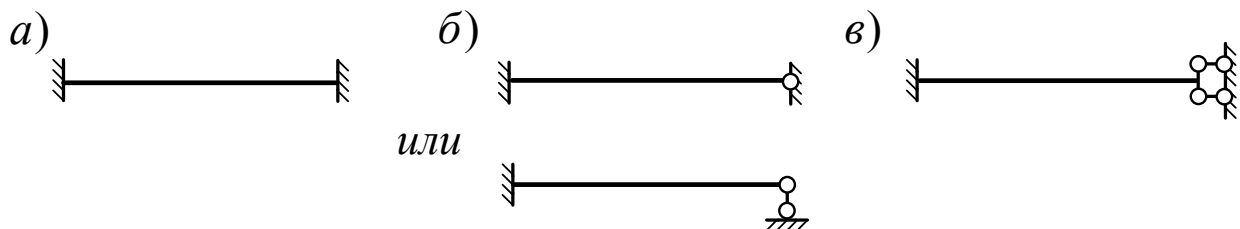


Рис. 6

Балочки вида, показанного на рис. 6в, могут встречаться при рассмотрении половин рам в расчетах симметричных рам.

Для рамы на рис. 3а основная система (О.С.) метода перемещений представлена рис. 3б.

#### 4. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Расчет рам методом перемещений выполняется с использованием основной системы этого метода, которая получается закреплением узлов, которые могут смещаться, от этих смещений путем установки дополнительных связей. При этом основная система должна работать так же как исходная система, в которой нет указанных дополнительных связей. В качестве условий, приравняющих работу О.С. к работе заданной системы, принимается равенство нулю реакций в дополнительных связях, так как их в исходной системе нет. Например, для рамы на рис. 5 следует записать  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$ . Учитывая, что реакции в О.С. возникают от внешней нагрузки и перемещений узлов, получим



$$R_1(Z_1, Z_2, P) = 0, \quad R_2(Z_1, Z_2, P) = 0.$$

Пользуясь принципом независимости действия сил и воздействий (перемещений), эти выражения можно представить в виде

$$\begin{cases} R_1(Z_1) + R_1(Z_2) + R_1(P) = 0; \\ R_2(Z_1) + R_2(Z_2) + R_2(P) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} R_{1Z_1} + R_{1Z_2} + R_{1P} = 0; \\ R_{2Z_1} + R_{2Z_2} + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Так как перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$  не известны, то реакции от их действия выражают через соответствующие единичные реакции  $R_{iZ_k} = r_{ik}Z_k$ .

В результате получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Такая форма записи уравнений метода перемещений называется канонической.

В общем случае система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1k}Z_k + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2k}Z_k + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + r_{i3}Z_3 + \dots + r_{ik}Z_k + \dots + r_{in}Z_n + R_{iP} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nk}Z_k + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

Здесь:  $Z_k (k=1\dots n)$  – неизвестные (угловые и линейные) смещения узлов;  $r_{ik}$  – реактивное усилие (момент, сила) в  $i$ -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещения (углового, линейного)  $k$ -той дополнительной связи (заделки, линейной связи) на единичную величину ( $Z_k = 1$ );

$R_{iP}$  – реактивное усилие (момент, сила) в  $i$ -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от действия внешней нагрузки.

**Физический смысл уравнений (для  $i$ -го уравнения):** реактивное усилие (момент, сила) в  $i$ -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещений всех дополнительных связей (угловых и линейных)  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и внешней нагрузки равняется нулю, так как этой  $i$ -той связи в исходной (рассчитываемой) системе нет.

Приведем примеры физического смысла коэффициентов канонических

уравнений и уравнений в целом, например, для основной системы метода перемещений, представленной на рис. 3:

$r_{11}$  – реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол;

$r_{53}$  – реактивная сила в 5-ой дополнительной линейной связи от поворота 3-ей дополнительной заделки на угол, равный единице;

$r_{26}$  – реактивный момент во 2-ой дополнительной заделке от единичного линейного смещения 6-ой дополнительной линейной связи;

$R_{4P}$  – реактивная сила в 4-ой дополнительной заделке от действия внешней нагрузки;

3-е уравнение:  $r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + \dots + r_{3n}Z_n + R_{3P} = 0$ ; – реактивный момент в 3-ей дополнительной заделке от перемещений всех дополнительных связей на величины  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и от действия внешней нагрузки равняется нулю, так как в заданной системе (рис. 3а) этой (3-ей) заделки нет.

Отметим, что коэффициенты  $r_{ik}$ , имеющие одинаковые индексы ( $r_{11}, r_{22}$ ), называют *главными*, а остальные – *побочными*; главные коэффициенты не могут быть отрицательными и нулевыми, а побочные коэффициенты должны удовлетворять теореме о взаимности единичных реакций ( $r_{ik} = r_{ki}$ ).

## 5. ТАБЛИЧНЫЕ ЭПЮРЫ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для определения реактивных усилий  $r_{ik}$  и  $R_{iP}$  необходимо уметь определять внутренние усилия (строить их эпюры) в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей (вместе, конечно, с соответствующими узлами) и от действия внешних нагрузок, после чего величины  $r_{ik}$  и  $R_{iP}$  можно определить из условий статики. Построение же указанных эпюр внутренних сил, в связи с тем, что О.С. метода перемещений представляет собой совокупность отдельных балочек, совершенно не зависящих друг от друга, связано с умением рассчитывать эти балочки (см. рис. 6).

В качестве внешних воздействий на балочки будут выступать:

- повороты заделок;
- линейные смещения заделок и шарнирных опор;
- силовые факторы (сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенные нагрузки).

Рассмотрим определение усилий в таких балочках от указанных воздействий на нескольких примерах. Расчет будем выполнять методом сил.

**А. Балка, защемленная с одной стороны, шарнирно опертая с другой и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой**

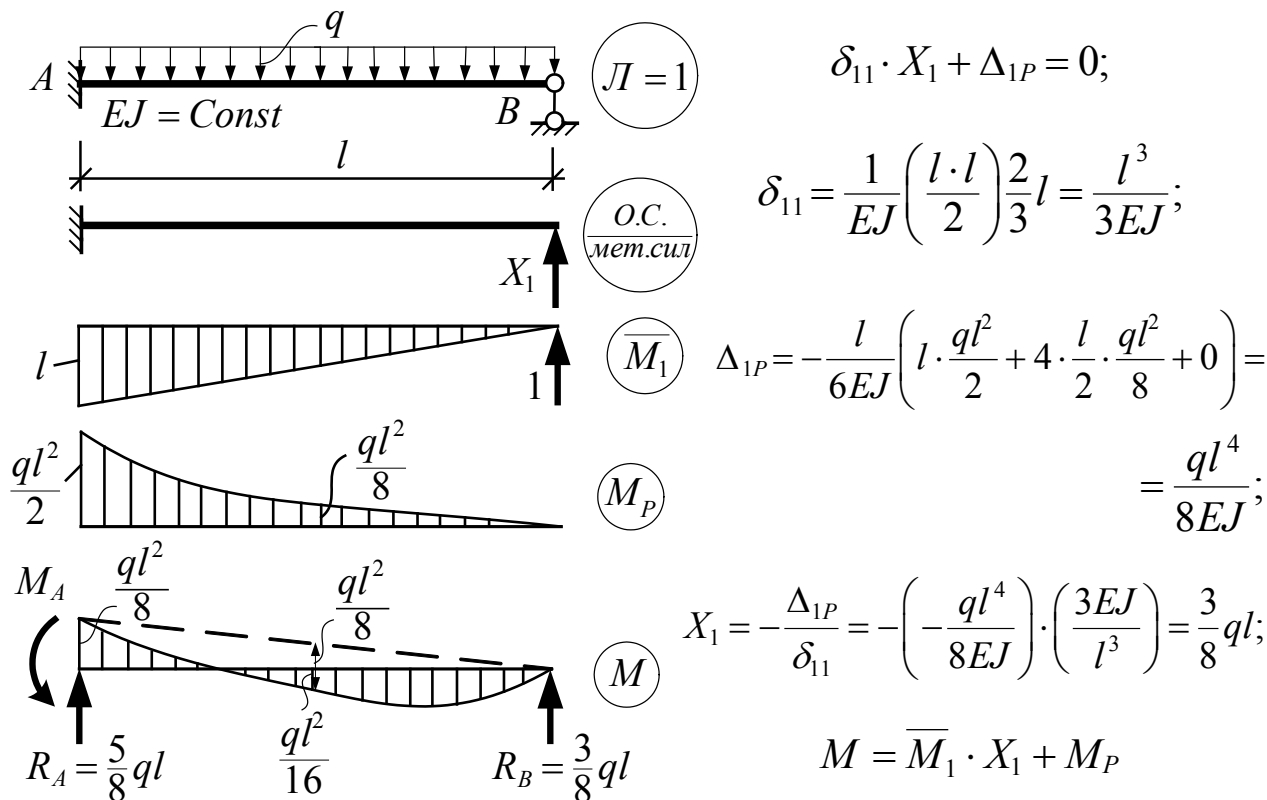


Рис. 7

**В. Та же балка при повороте заделки**

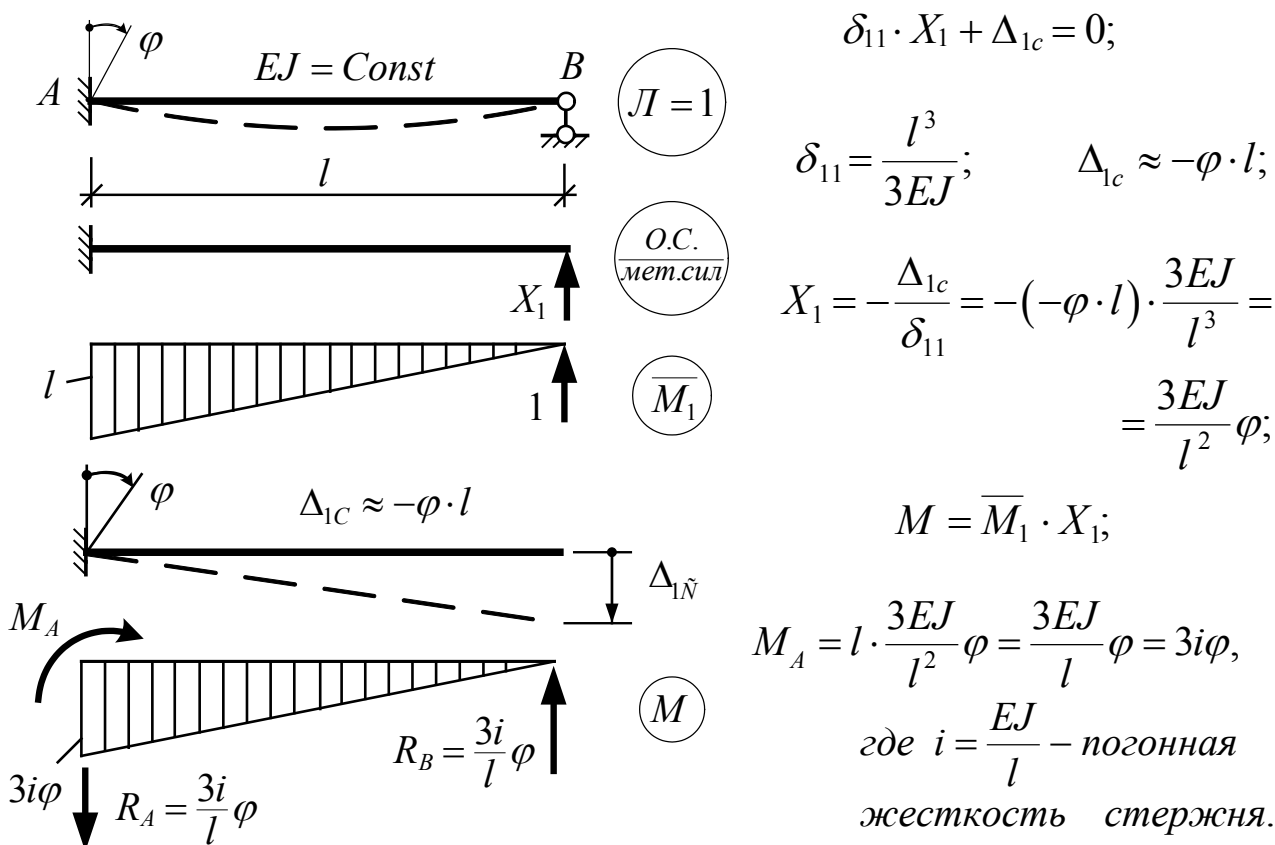


Рис. 8

**С. Балка, защемленная с двух сторон, при линейном смещении одной из опор**

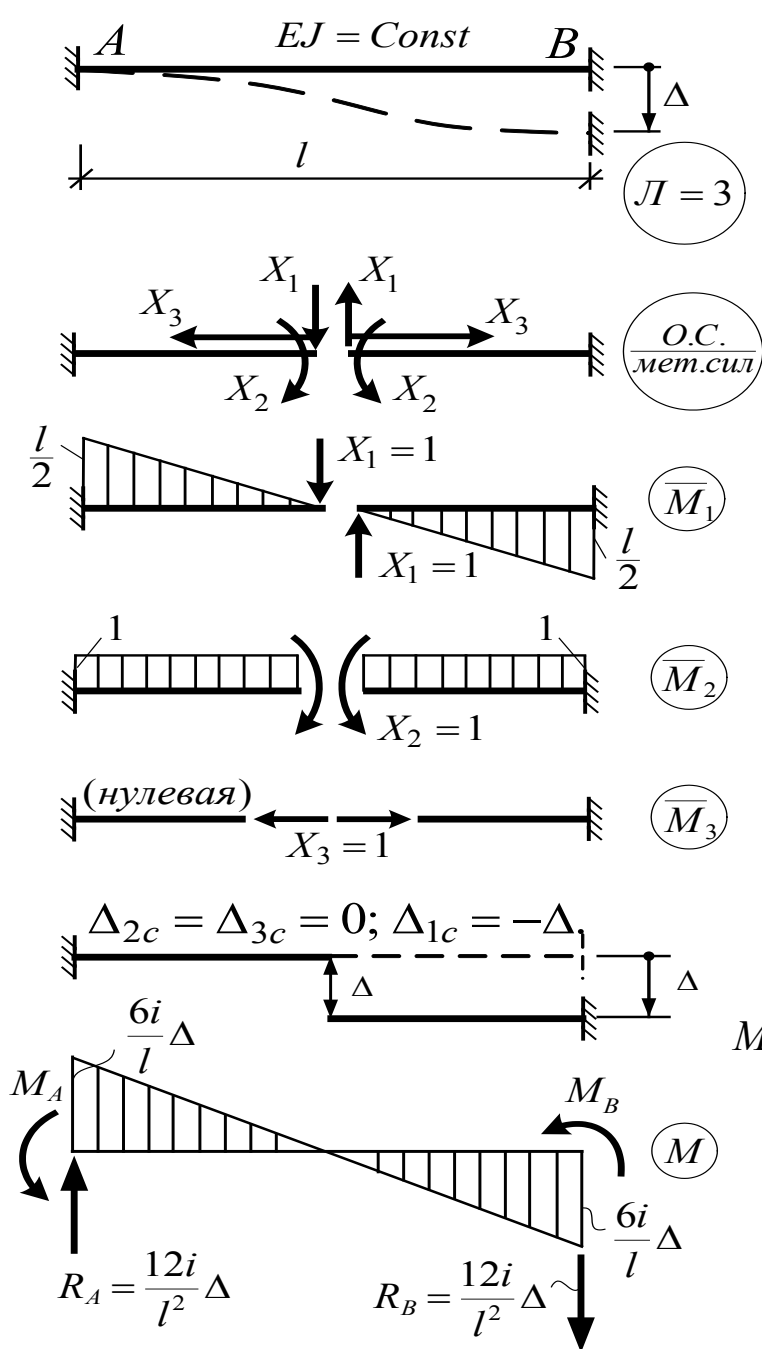


Рис. 9

Аналогично можно получить усилия для балочек (рис. 6), из которых может состоять О.С. метода перемещений, и от других воздействий.

Эпюры изгибающих моментов и величины опорных реакции для рассматриваемых балочек от наиболее часто встречающихся воздействий приведены в таблице 1 (см. стр. 13 – 17).

$X_1$  – кососимметричное неизвестное;

$X_2, X_3$  – симметричные неизвестные.

Внешнее воздействие – кососимметричное, поэтому –

$$X_2 = X_3 = 0.$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1c} = 0; \Delta_{1c} = -\Delta;$$

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} = \frac{l^3}{12EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = -(-\Delta) \frac{12EJ}{l^3} = \frac{12EJ}{l^3} \Delta;$$

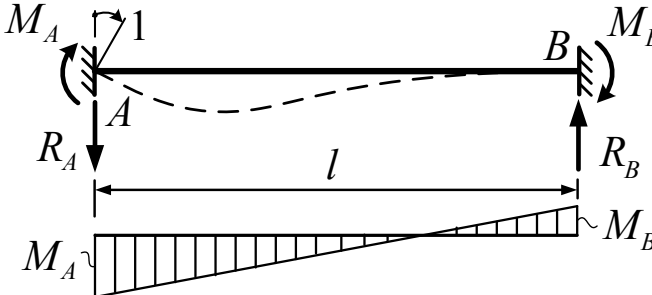
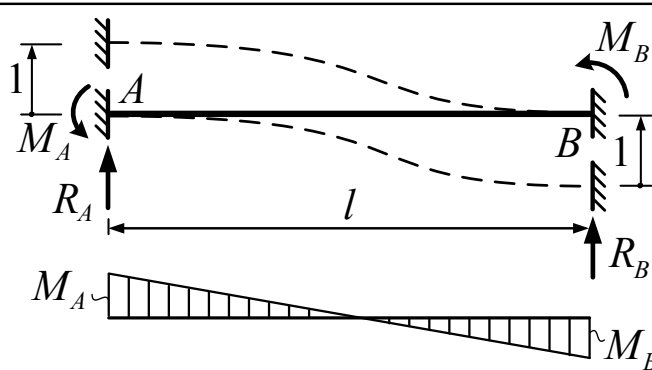
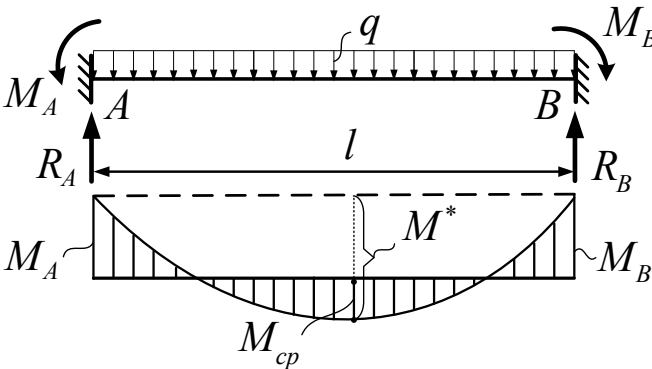
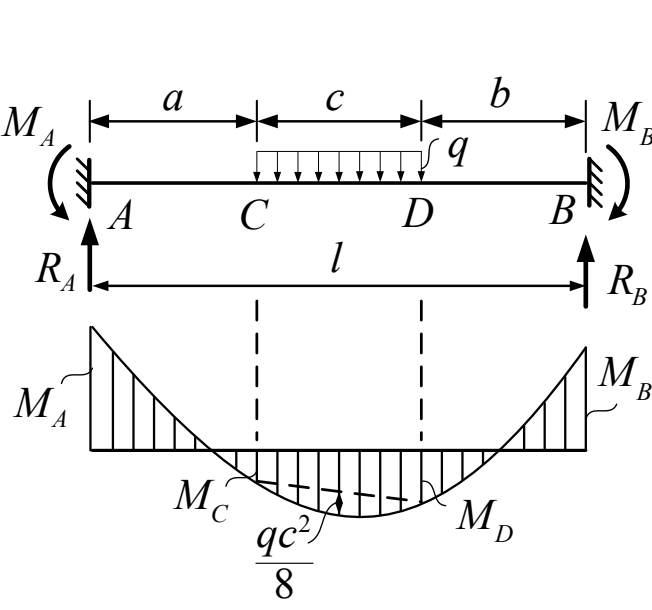
$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3 = \overline{M}_1 \cdot X_1;$$

$$M_A = -M_B = \frac{l}{2} \cdot \frac{12EJ}{l^3} \Delta = \frac{6EJ}{l^2} \Delta = \frac{6i}{l} \Delta.$$

Таблица 1

	$M_A = 3i;$ $\text{где } i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l};$
	$M_A = \frac{3i}{l};$ $\text{где } i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l^2};$
	$M_A = \frac{ql^2}{8};$ $M^* = \frac{ql^2}{8};$ $M_{cp} = \frac{ql^2}{16};$	$R_A = \frac{5}{8}ql;$ $R_B = \frac{3}{8}ql.$
	$M_A = qc \left( a + \frac{c}{2} - l\beta \right);$ $M_C = qc \left[ \frac{c}{2} - (b+c)\beta \right];$ $M_D = \beta q b c = q c b \beta;$ $R_A = qc\beta; \quad R_B = qc(1-\beta);$ $\text{где } \beta = \frac{1}{2l^3} \left[ c^2 \left( b + \frac{3}{4}c \right) + \right.$ $\left. + la^2 + a(2l-a) \left( l + \frac{c}{2} - b \right) \right].$	

	$M_A = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}; \quad M^* = \frac{Pab}{l};$ $M_C = \frac{Pb}{2} \left[ \frac{2a}{l} - \frac{b}{l^3} (l^2 - b^2) \right];$ $R_A = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3}; \quad R_B = \frac{Pa^2(3l - a)}{2l^3};$ <p><u>При <math>a = b = \frac{l}{2}</math>:</u> <math>M_A = \frac{3}{16}Pl</math>; <math>M^* = \frac{Pl}{4}</math>;</p> $M_C = \frac{5}{32}Pl; \quad R_A = \frac{11}{16}P; \quad R_B = \frac{5}{16}P.$
	$M_A = \frac{3}{2}Pa \left( 1 - \frac{a}{l} \right); \quad M^* = Pa;$ $M_C = Pa \left[ \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left( 2 - \frac{a}{l} \right) - \frac{1}{2} \right];$ $M_D = Pa \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \right];$ $R_A = P \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \right];$ $R_B = P \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \right].$
	$M_A = \frac{m(l^2 - 3b^2)}{2l^2};$ $M_C^{\text{лев}} = \frac{ma}{l} - \frac{b}{l}M_A;$ $M_C^{\text{np}} = \frac{mb}{l} + \frac{b}{l}M_A;$ $R_A = R_B = \frac{3m(l^2 - b^2)}{2l^3}.$ <p><u>При <math>a = b = l/2</math>:</u></p> $M_A = \frac{m}{8}; \quad R_A = R_B = \frac{9}{8} \frac{m}{l}.$

	$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ $\text{и де}$	$R_A = R_B = \frac{6i}{l};$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $\text{и де}$	$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2};$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $M^* = \frac{ql^2}{8};$ $M_{cp} = \frac{ql^2}{24};$	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$
	$M_A = 2qcl \left[ \frac{1}{2l} \left( a + \frac{c}{2} \right) + (\beta - \gamma) \right];$ $M_B = 2qcl(\gamma - 2\beta);$ $R_B = 2qc(2\gamma - 3\beta);$ $M_C = 2qc \left[ (l - 2a)\gamma + (3a - l)\beta - \frac{c}{4} \right];$ $M_D = 2qc \left[ (2b - l)\gamma + (2l - 3b)\beta \right];$ $R_A = qc - R_B = qc \left[ 1 - 2(2\gamma - 3\beta) \right];$ $\text{и де: } \beta = \frac{1}{2l^2} \left[ \frac{c^2}{3} + \gamma(l - b) \right];$	$\gamma = \frac{1}{2l^3} \left[ c^2 \left( b + \frac{3}{4}c \right) + la^2 + a(2l - a) \left( l + \frac{c}{2} - b \right) \right].$

	$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}; M^* = \frac{Pab}{l};$ $M_C = \frac{Pab}{l} \left[ 1 - \frac{a}{l} - \frac{(b-a)b}{l^2} \right];$ $R_A = \frac{Pb^2}{l^2} \left( 1 + \frac{2a}{l} \right);$ $R_B = \frac{Pa^2}{l^2} \left( 1 + \frac{2b}{l} \right);$ <p>При <math>a = b = l/2</math>: <math>R_A = R_B = \frac{P}{2};</math></p> $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}; M^* = \frac{Pl}{4}.$
	$M_A = M_B = Pa \left( 1 - \frac{a}{l} \right);$ $M^* = Pa; M_C = M_D = \frac{Pa^2}{l};$ $R_A = R_B = P.$
	$M_A = \frac{mb}{l^2} (3a - l); M_B = \frac{ma}{l^2} (3b - l);$ $M_C^{лев} = \frac{mb}{l^3} (l^2 - 3al + 6a^2);$ $M_C^{np} = \frac{ma}{l^3} (l^2 - 3bl + 6b^2);$ $R_A = R_B = \frac{6ab}{l^3} m;$ <p>При <math>a = b = l/2</math>: <math>M_A = M_B = \frac{m}{4};</math></p> $M_C^{лев} = M_C^{np} = \frac{m}{2}; R_A = R_B = \frac{3m}{2l}.$



	$M_A = M_B = i;$ $\text{где } i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = 0.$
	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $\text{где } i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = \frac{12i}{l^2}.$
	$M_A = \frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6};$	$R_A = ql.$
	$M_A = \frac{Pa^2}{2l} \left( \frac{2l}{a} - 1 \right);$ $M_B = \frac{Pa^2}{2l};$	$R_A = P.$
	$M_A = \frac{mb}{l};$ $M_B = \frac{ma}{l};$	$R_A = 0.$

## 6. ПОСТРОЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ И ГРУЗОВЫХ ЭПЮР В ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Построение единичных и грузовых эпюр усилий (изгибающих моментов) в основной системе метода перемещений выполняется с использованием готовых (табличных) эпюр усилий для отдельных участков основной системы (см. табл. 1), каждый из которых работает независимо от других, на действующее непосредственно на него воздействие, в соответствии которому табличная эпюра с учетом конкретных параметров данного участка переносится на этот участок. При этом при построении единичных эпюр усилий вначале целесообразно представить схему деформирования основной системы от соответствующего перемещения узла, которая позволяет четко выявить, какие элементы (участки) основной системы работают, как они работают и с какой стороны элементов волокна растягиваются, а с какой сжимаются (эпюры изгибающих моментов должны строиться со стороны растянутых волокон). Ординаты единичных эпюр, как видно из табличных эпюр, выражаются через погонные жесткости участков, представляющих собой отношения действительных жесткостей участков к их длинам –  $i_{yc} = EJ_{yc} / l_{yc}$ , что в случае задания жесткостей участков в общем виде может вызывать некоторые трудности со сравнением ординат единичных эпюр на разных участках. Чтобы избежать этих трудностей, можно поступать по-разному:

– можно одну из погонных жесткостей участков выбрать в качестве некоторой общей погонной жесткости  $i$ , после чего погонные жесткости остальных участков выразить через эту величину  $i$ ; так, для рамы на рис. 10а погонные жесткости участков записываются следующим образом:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{EJ_{12}}{l} = \frac{kEJ}{\alpha \cdot h} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{EJ}{h};$$

и если обозначить  $\frac{EJ}{h} = i$  или  $EJ = i \cdot h$ , то получим:  $i_{01} = i_{23} = i$ ;  $i_{12} = \frac{k}{\alpha} i$

(далее в этих методических указаниях используется именно такой подход выражения погонных жесткостей);

– можно записывать погонные жесткости просто через некоторую величину  $EJ$ , через которую выражаются жесткости участков  $EJ_{\delta\pm} = \beta_{\delta\pm} EJ$ ; при этом случае погонные жесткости участков будут выражаться через указанный параметр  $EJ$ , и для рамы на рис. 10а будут равны:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{k}{\alpha h} EJ;$$

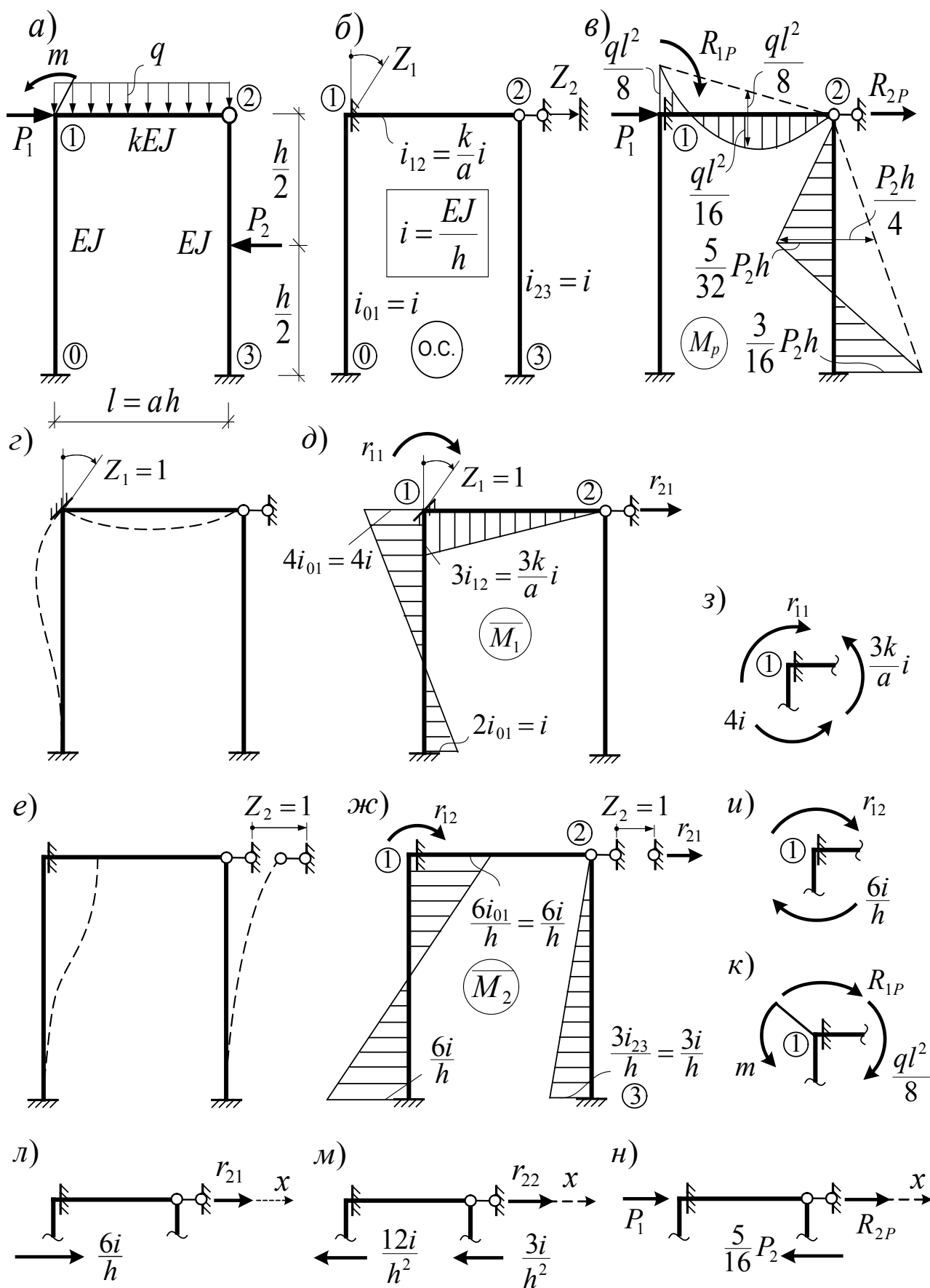


Рис. 10

– можно для величин  $i$ ,  $EJ$  задаться (произвольно) и некоторыми численными значениями, удобными, с нашей точки зрения, для дальнейших расчетов; это можно сделать в связи с тем, что впоследствии при построении окончательных эпюр усилий величины  $i$ ,  $EJ$ , общие для всех участков, все равно сокращаются, поэтому их численные значения не влияют на результаты расчета; для рамы на рис. 10а удобно, например, принять  $i = \alpha$ , а  $EJ = ah$ .

Рама, представленная на рис. 10, как определено ранее (рис.1), имеет в методе перемещений два неизвестных (степень ее кинематической неопределимости равна двум), и основная система метода перемещений для нее имеет вид, показанный на рис. 10б, а единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов (а также соответствующие единичным перемещениям и эпюрам схемы деформаций) представлены на рис. 10в – 10ж.

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода перемещений  $r_{ik}$  и  $R_{iP}$  по физическому смыслу, как уже отмечалось, могут быть двух видов – реактивные моменты в дополнительных заделках и реактивные силы в дополнительных линейных связях. Их определение, как определение любых реакций, может быть выполнено на основе уравнений равновесия либо всей системы, либо какой-то части (статический способ). Как показывает опыт, удобнее рассматривать равновесие отдельных частей основной системы метода перемещений, находящейся под тем воздействием, от которого определяется искомое реактивное усилие. При этом для реактивных усилий в дополнительных связях в методе перемещений применяется следующее правило знаков – реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с направлением перемещения соответствующей дополнительной связи. При определении неизвестных реактивных усилий всегда следует направлять в положительных направлениях, используя их далее с полученными знаками.

В соответствии с изложенным определение величин  $r_{ik}$  и  $R_{iP}$ , представляющих по смыслу реактивные моменты в заделках, удобнее всего выполнять на основе рассмотрения равновесия узлов, в которых установлены соответствующие дополнительные заделки, предварительно вырезав эти узлы.

В качестве уравнений равновесия при этом составляются суммы всех моментов (внешних и внутренних – в сечениях) в узлах. Из этих уравнений и определяются искомые реактивные моменты.

Так, для рамы на рис. 10 при определении коэффициента  $r_{11}$ , представляющего собой реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол, необходимо вырезать узел 1 из эпюры  $\overline{M}_1$  (построенной от поворота 1-ой заделки на единичный угол) (см. рис. 10з), из равновесия которого получим:

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} - 4i - \frac{3k}{\alpha}i = 0; \quad r_{11} = 4i + \frac{3k}{\alpha}i.$$

Коэффициент  $r_{12}$  найдем из вырезания узла 1 на эпюре  $\overline{M}_2$  (рис. 10u):

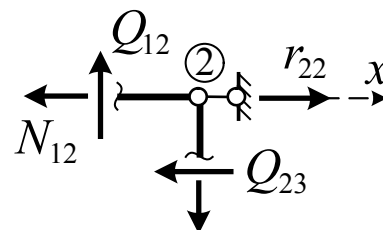
$$\sum M_1 = 0; \quad r_{12} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{12} = -\frac{6i}{h}.$$

Для определений свободного члена  $R_{1P}$  необходимо вырезать узел 1 на эпюре  $M_P$  (рис. 10к):

$$\sum M_1 = 0; \quad R_{1P} + \frac{ql^2}{8} - m = 0; \quad R_{1P} = m - \frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, первый индекс искомого коэффициента или свободного члена здесь, по существу, показывает номер узла, который надо вырезать для определения этого коэффициента или свободного члена, а второй индекс указывает на эпюру, из которой этот узел надо вырезать.

Казалось бы, что и коэффициенты (свободные члены) канонических уравнений, представляющие по смыслу реактивные силы в дополнительных линейных связях, также будет удобно определять из вырезания узлов, в которых эти связи установлены. Но оказывается это не совсем так. Например, для определения коэффициента  $r_{22}$ , являющегося реактивной силой во 2-ой дополнительной линейной связи от ее же единичного смещения, можно, конечно, вырезать узел 2 на эпюре  $\overline{M}_2$  (рис. 11); в результате чего получим:



$$\sum X = 0; \quad r_{22} - Q_{23} - N_{12} = 0; \quad r_{22} = Q_{22} + N_{12}.$$

Рис. 11

Величину  $Q_{23}$  легко определить по эпюре  $\overline{M}_2$ , используя, например, формулу:

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \right|, \quad (4)$$

где  $Q_0$  учитывает действие распределенной нагрузки  $q$  на участке, т.е. это эпюра поперечных сил на участке, как в простой двухопорной балке (если  $q$  нет, то  $Q_0 = 0$ );  $M_{np}$ ,  $M_{лев}$  – ординаты изгибающих моментов справа и слева по концам участка;  $l$  – длина участка;

**знак** перед абсолютной величиной принимается **по следующему правилу**: если стержень, на котором построена рассматриваемая эпюра  $M$ , необходимо поворачивать до совмещения с прямой, соединяющей ординаты  $M_{np}$  и  $M_{лев}$  по кратчайшему пути по часовой стрелке, то принимается знак «+», если против часовой стрелки, то – знак «-».

В результате на участке 2–3 (рис. 10ж) получим:

$$Q_{23} = 0 + \left| \frac{3i/h - 0}{h} \right| = \frac{3i}{h^2}.$$

Следует заметить, что величину  $Q_{23}$  можно получить и через опорную реакцию в стержне 2–3 от действия заданного смещения  $Z_2 = 1$ , учитывая, что поперечная сила в приопорном сечении равна по величине реакции соответствующей опоры, которая приведена в табличных эпюрах; знак же поперечной силы при этом определяется по обычному правилу знаков для  $Q$  или по эпюре  $M$ . Для определения же величины продольной силы  $N_{1-2}$  в стержне 1–2 необходимо вначале по эпюре  $\overline{M}_2$ , используя формулу (4), построить эпюру поперечных сил  $\overline{Q}_2$ , после чего можно будет найти из вырезания узлов величину  $N_{1-2}$ . Этот процесс, как видим, достаточно трудоемок.

Проще будет процедура определения коэффициентов  $r_{ik}$ ,  $R_{iP}$ , представляющих собой реакции в линейных связях, если вырезать не узлы, а части основной системы метода перемещений таким образом, чтобы в уравнения равновесия входили только поперечные силы; при этом в качестве уравнений равновесия удобнее всего использовать сумму проекций сил на ось, параллельную искомой реактивной силе.

Так, для определения коэффициента  $r_{21}$  удобно вырезать из эпюры  $\overline{M}_1$  верхнюю часть, показанную на рис. 10л, из равновесия которой получим:

$$\sum X = 0; \quad r_{21} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{21} = -\frac{6i}{h}.$$

Аналогично найдем коэффициент  $r_{22}$  (рис. 10м) и свободный член  $R_{2P}$  (рис. 10н), вырезав соответствующие части основной системы из эпюр  $\overline{M}_2$  и  $M_P$  (рис. 10):

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{12i}{h^2} = \frac{3i}{h^2} = 0; \quad r_{22} = \frac{15i}{h^2};$$

$$\sum X = 0; \quad R_{2P} + P_1 - \frac{5}{16}P_2 = 0; \quad R_{2P} = \frac{5}{16}P_2 - P_1.$$

Следует отметить, что значения  $r_{ik}$  и  $R_{iP}$  можно определить и с помощью формулы Мора [1]. При этом величины коэффициентов  $r_{ik}$  вычисляются по формулам:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k ds}{EJ};$$

$$r_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2 ds}{EJ};$$

(5)

а величины свободных членов  $R_{iP}$  по формуле

$$R_{iP} = -\sum \int \frac{\overline{M}_i M'_P ds}{EJ},$$

(6)

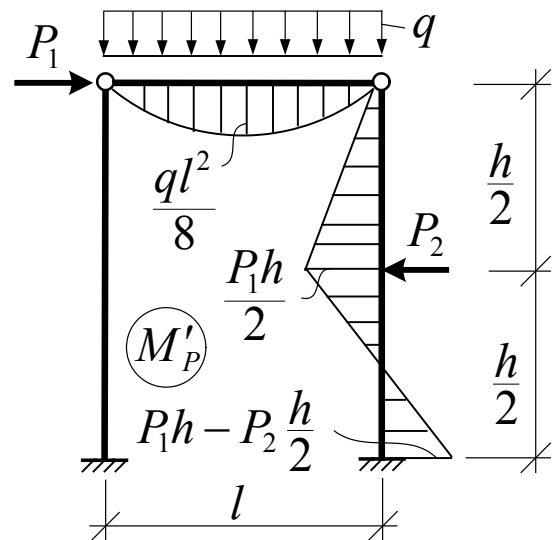


Рис. 12

где  $M'_P$  – эпюра изгибающих моментов

от действия внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или О.С. метода перемещений удалением лишних связей, в том числе обязательно той связи, реакция которой определяется.

Вычислим таким способом для рассматриваемого примера (рис. 10), например, коэффициенты  $r_{12}$ ,  $r_{22}$  и свободный член  $R_{1P}$ . Единичные эпюры в О.С. метода перемещений показаны на рис. 10, а один из возможных

вариантов эпюры  $M'_P$  – на рис. 12.

Учитывая, что  $\frac{h}{EJ} = \frac{1}{i}$ , а  $\frac{1}{kEJ} = \frac{\alpha h}{kEJ} = \frac{\alpha}{ki}$ , получим:

$$r_{12} = r_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left( -\frac{6i}{h} \cdot 2i - 4i \cdot \frac{6i}{h} \right) = -\frac{6i}{h};$$

$$r_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[ \left( \frac{6i}{h} \right)^2 + \left( \frac{6i}{h} \right)^2 \right] + \frac{h}{6EJ} \left[ \left( \frac{3i}{h} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{1,5i}{h} \right)^2 \right] = \frac{15i}{h^2};$$

$$R_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M'_P ds}{EJ} = -\frac{l}{6kEJ} \left( 4 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{15k}{\alpha} i \right) = -\frac{\alpha}{6ki} \left( \frac{ql^2}{2} \cdot 1,5 \frac{ki}{\alpha} \right) = -\frac{ql^2}{8};$$

вычисленные здесь значения совпадают с найденными ранее статическим способом.

## 8. ПРОВЕРКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Проверка правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений в методе сил. При этом для выполнения проверок должна быть построена единичная суммарная эпюра  $\overline{M}_s$ , то есть эпюра, представляющая сумму всех единичных эпюр  $\overline{M}_i$  в основной системе метода перемещений:

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_n. \quad (7)$$

После этого в методе перемещений могут быть выполнены следующие проверки:

**а) универсальная проверка**

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad (8)$$

где  $\sum \sum r_{ik}$  – сумма всех единичных коэффициентов метода перемещений



(сумма единичных коэффициентов по всем уравнениям метода перемещений)

$$\sum \sum r_{ik} = (r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}) + (r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}) + \dots + (r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn}).$$

Если универсальная проверка выполняется, то это подтверждает правильность вычислений единичных коэффициентов; если же универсальная проверка не выполняется, то для выяснения, в какой группе единичных коэффициентов находится ошибка, можно сделать так называемые построчные проверки.

**б) построчные проверки**, то есть проверки коэффициентов, входящих в каждое из уравнений (1-ое, 2-ое, ...  $n$ -ое) метода перемещений имеют вид:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s ds}{EJ} = \sum_{k=1}^n r_{ik} \quad (i = 1 \dots n), \quad (9)$$

где  $\sum r_{ik}$  – сумма коэффициентов, входящих в  $i$ -тое уравнение метода перемещений.

Таких проверок, как видно, может быть  $n$ ; какие-то из них будут выполняться (значит соответствующие коэффициенты вычислены верно), а какие-то – могут не выполняться; анализ полученных результатов позволяет выявить те коэффициенты, при вычислениях которых были допущены ошибки.

Заметим, что если универсальная проверка выполняется, то необходимости в выполнении построчных проверок нет.

**в) столбцовая проверка** – служит для проверки грузовых коэффициентов и выполняется по формуле:

$$-\sum \int \frac{\overline{M}_s M'_P ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n R_{iP}, \quad (10)$$

где  $R_{iP} = R_{1P} + R_{2P} + \dots + R_{nP}$  – сумма всех грузовых коэффициентов (свободных членов системы уравнений);

$M'_P$  – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений путем отбрасывания лишних связей, в том числе обязательно дополнительных связей, в которых определяются реакции  $R_{iP}$  (см., например, рис. 12).

## 9. ПОСТРОЕНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ЭПЮР УСИЛИЙ И ИХ ПРОВЕРКИ

Найденные значения единичных и грузовых коэффициентов подставляются в систему канонических уравнений метода перемещений (3), решая которую определим неизвестные метода перемещений  $Z_i$  ( $i = 1 \dots n$ ). После этого окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена на основе принципа независимости действия сил и воздействий (перемещений) по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_p. \quad (11)$$

Окончательная эпюра поперечных сил строится по эпюре  $M$  (11) с использованием формулы (4). Окончательная эпюра продольных сил строится по эпюре  $Q$  способом вырезания узлов. Для подтверждения правильности расчета и построения окончательных эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  выполняются следующие проверки:

**а) проверка равновесия узлов на эпюре  $M$ ;** эта проверка при расчете рамы методом перемещений имеет важное значение, так как на единичных ( $\overline{M}_i$ ) и грузовых ( $M_p$ ) эпюрах в О.С. метода перемещений без учета дополнительных заделок (которых в заданной системе действительно нет) равновесие узлов не выполняется; в окончательной же эпюре  $M$  равновесие узлов должно выполняться;

**б) деформационная (кинематическая) проверка эпюры  $M$ ;** эта проверка здесь производится так же, как и методе сил; но здесь для ее выполнения вначале необходимо для заданной системы выбрать основную систему метода сил (предварительно, определив число лишних связей), в которой необходимо построить суммарную единичную эпюру  $\overline{M}_s^{м.сил.}$  от единичных значений всех неизвестных метода сил (или хотя бы одну из единичных эпюр  $\overline{M}_i^{м.сил.}$ ), которая охватывала бы максимальное число участков системы; после этого деформационная проверка выполняется по формуле:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{м.сил.} M ds}{EJ} = 0 \quad \left( \text{или} \quad \sum \int \frac{\overline{M}_i^{м.сил.} M ds}{EJ} = 0 \right). \quad (12)$$

Физический смысл этой проверки здесь такой же, как и в методе сил;

**в) проверка равновесия узлов при построении эпюры  $N$  по эпюре  $Q$ ;** эпюра  $N$  строится, как уже отмечалось, по эпюре  $Q$  способом вырезания узлов, т.е. продольные силы находятся из уравнений равновесия сил в узлах (уравне-

ний проекций на две любые оси); соблюдение равновесия всех узлов при этом свидетельствует о правильности расчета; если же хотя бы в одном из узлов хотя бы одно из уравнений равновесия не будет выполняться, то это значит, что в расчете допущена ошибка; чаще всего эта ошибка бывает связана с неверным определением коэффициентов или свободных членов, представляющих собой реактивные силы в линейных дополнительных связях;

г) **статическая проверка**; выполняется так же, как и в методе сил, то есть вычисляются суммы проекций всех внешних нагрузок и опорных реакций на две любые оси и сумма моментов этих же сил и опорных реакций относительно любой точки, которые должны быть равны нулю.

## 10. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 13а; степень кинематической неопределимости ее равна трем ( $n = n_{\delta} + n_{\varepsilon} = 2 + 1 = 3$ ). Основная система метода перемещений представлена на рис. 13б. Погонные жесткости участков

$$i_{01} = \frac{EJ}{2}; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = \frac{EJ}{4}; \quad i_{23} = \frac{EI}{6}$$

удобно выразить через общую для всех участков величину  $i = EJ/12$  ( $EJ = 12i$ ), с учетом которой получим:

$$i_{01} = 6i; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = 3i; \quad i_{23} = 2i;$$

(для наглядности эти погонные жесткости участков удобно показать на основной системе метода перемещений (рис. 13б). Единичные эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений  $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$  построены на основе схем деформаций О.С. от перемещений узлов  $Z_1, Z_2, Z_3$  на единичные величины (рис. 13в, 13е, 13и) с использованием табличных эпюр (табл.1) и показаны соответственно на рис. 13г, 13ж, 13к. Единичные коэффициенты канонических уравнений определяются статическим способом: реактивные моменты  $r_{1k}, r_{2k}$  – из вырезания узлов 1 и 2 из эпюр  $\overline{M}_k$ , а реактивные силы  $r_{3k}$  – из вырезания верхней части рамы на эпюрах  $\overline{M}_k$  – см. рис. 13д, 13з, 13л:

$$\text{– рис. 13д: } \begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{11} - 12i - 18i = 0; & r_{11} = 30i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{21} - 6i = 0; & r_{21} = 6i; \\ \sum X = 0; & r_{31} + 9i = 0; & r_{31} = -9i; \end{cases}$$

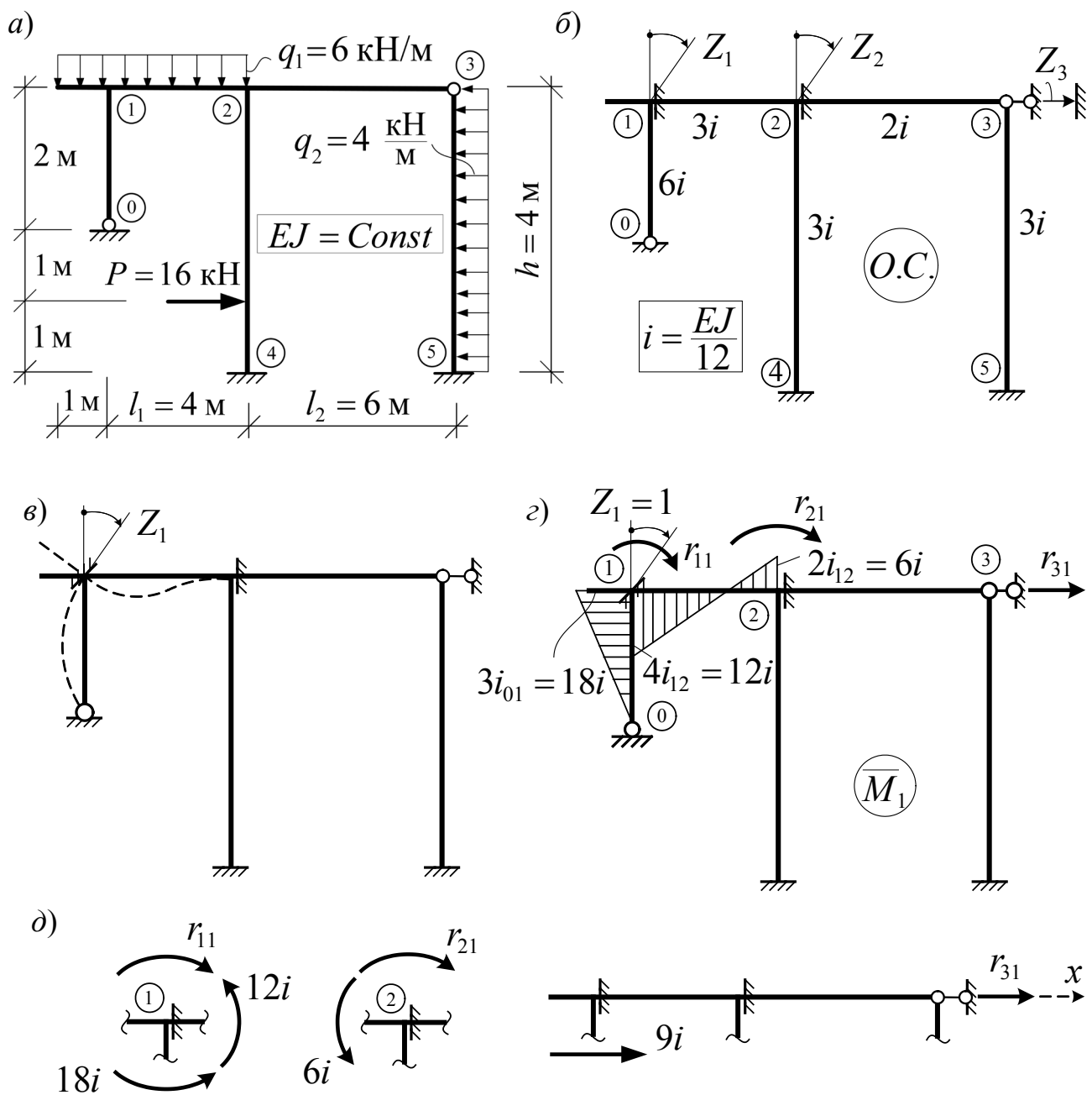


Рис. 13

– рис. 14, в: 
$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{12} - 6i = 0; & r_{12} = 6i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{22} - 6i - 12i - 12i = 0; & r_{22} = 30i; \\ \sum X = 0; & r_{32} + 4,5i = 0; & r_{32} = -4,5i; \end{cases}$$

– рис. 14, е: 
$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{13} + 9i = 0; & r_{13} = -9i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{23} + 4,5i = 0; & r_{23} = -4,5i; \\ \sum X = 0; & r_{33} - 4,5i - 2,25i - 0,5625i = 0; & r_{33} = 7,3125i. \end{cases}$$

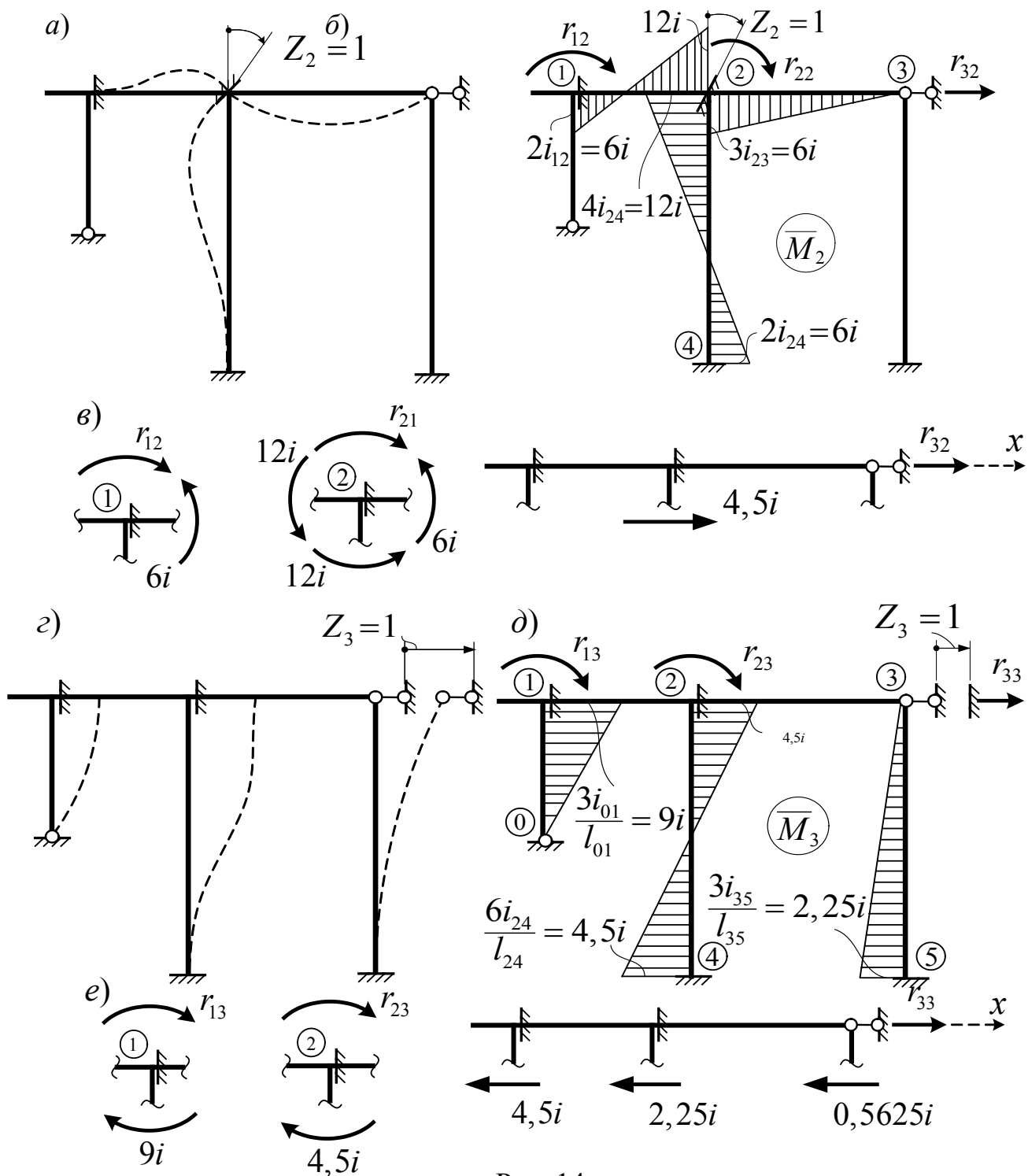


Рис. 14

Грузовая эпюра  $M_P$  в основной системе метода перемещений представлена на рис. 15, а. Грузовые коэффициенты (свободные члены уравнений) определяются по аналогии с единичными (см. рис 15, б):

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; & R_{1P} + 8 - 3 &= 0; & R_{1P} &= -5; \\ \sum M_2 &= 0; & R_{2P} - 8 - 3 &= 0; & R_{2P} &= 11; \\ \sum X &= 0; & R_{3P} + 2,5 - 6 &= 0; & R_{3P} &= 3,5. \end{aligned}$$

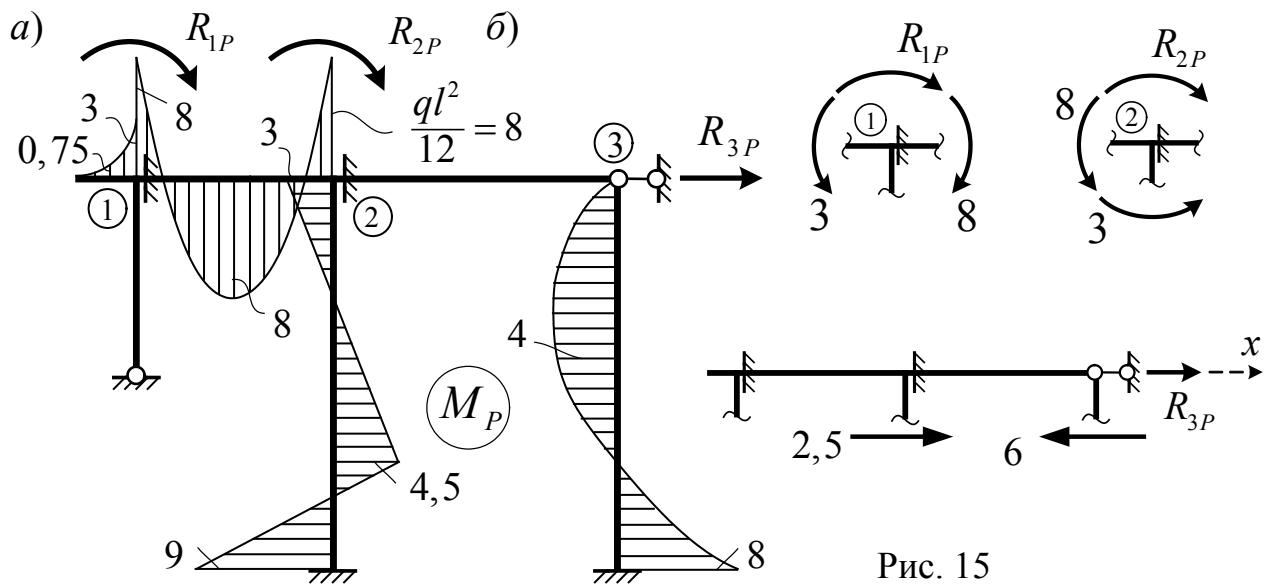


Рис. 15

После подстановки найденных значений единичных коэффициентов и свободных членов в систему уравнений (3) получим ее в виде

$$\begin{cases} 30i \cdot Z_1 + 6i \cdot Z_2 - 9i \cdot Z_3 - 5 = 0; \\ 6i \cdot Z_1 + 30i \cdot Z_2 - 4,5i \cdot Z_3 + 11 = 0; \\ -9i \cdot Z_1 - 4,5i \cdot Z_2 + 7,3125i \cdot Z_3 + 3,5 = 0; \end{cases}$$

решив эту систему уравнений, найдем неизвестные перемещения узлов рамы

$$Z_1 = \frac{0,0484}{i}; \quad Z_2 = -\frac{0,4839}{i}; \quad Z_3 = -\frac{0,7169}{i},$$

после чего окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_p$$

и будет иметь вид, представленный рис. 16, а; на рис. 16, б показано равновесие узлов 1 и 2 на окончательной эпюре  $M$ .

Для выполнения деформационной проверки эпюры  $M$  выберем для заданной рамы, имеющей четыре лишних связи ( $L = 4$ ), основную систему метода сил в виде, показанном на рис. 15, в; суммарная единичная эпюра  $M_s^{мет. сил}$ , построенная сразу от всех неизвестных  $X_1 \dots X_4$  единичных величин, показана на рис. 15, г; тогда деформационная проверка запишется в виде:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{мет. сил} \cdot M}{EJ} ds = 0;$$

$$\frac{1}{EJ} \left[ \frac{7,323 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (10,323 \cdot 2 + 4 \cdot 5,597 \cdot 0 - 2 \cdot 2,484) + \frac{2,903 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (4 \cdot 2 \cdot 3,194 - \right.$$



$$-3,312 + 34,838 + 17,032 - 25,634 - 59,612 + 13,161) = \frac{1}{EJ}(88,559 - 88,558) \approx 0;$$

Погрешность  $\left( \left| \frac{88,559 - 88,558}{88,558} \right| \cdot 100\% = 0,1\% \right)$  незначительна.

Эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 16, д) построим, вычислив на участках непрерывного изменения эпюры  $M$  значения  $Q$  по формуле (4):

$$Q_{0-1} = - \left| \frac{7,323 - 0}{2} \right| = -3,661 \text{ кН}; \quad Q_{A-1}^{\text{лев}} = + \frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = 0;$$

$$Q_{A-1}^{\text{прав}} = - \frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{1-2}^{\text{лев}} = \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = 12 + 1,96 = 13,96 \text{ кН};$$

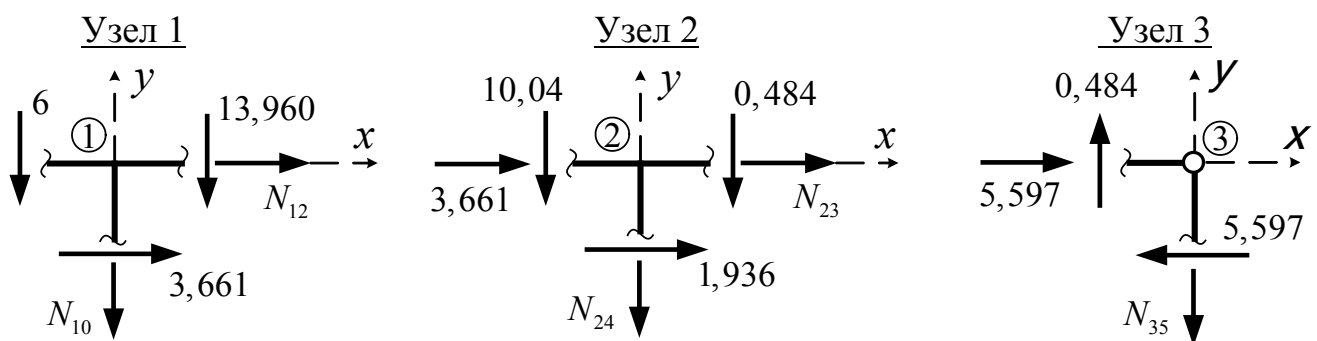
$$Q_{1-2}^{\text{прав}} = - \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = -12 + 1,96 = -10,04 \text{ кН};$$

$$Q_{2-3} = + \left| \frac{2,903 - 0}{6} \right| = 0,484 \text{ кН}; \quad Q_{4-B} = + \left| \frac{8,677 - (-5,387)}{1} \right| = 14,064 \text{ кН};$$

$$Q_{B-2} = - \left| \frac{5,387 - (-0,419)}{3} \right| = -1,936 \text{ кН}; \quad Q_{3-5}^{\text{лев}} = + \frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = 5,597 \text{ кН};$$

$$Q_{3-5}^{\text{прав}} = - \frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = -8 - 2,403 = -10,403 \text{ кН}.$$

Эпюру продольных сил  $N$  (рис. 16, е) построим, вырезая узлы на эпюре  $Q$  и рассматривая их равновесие:

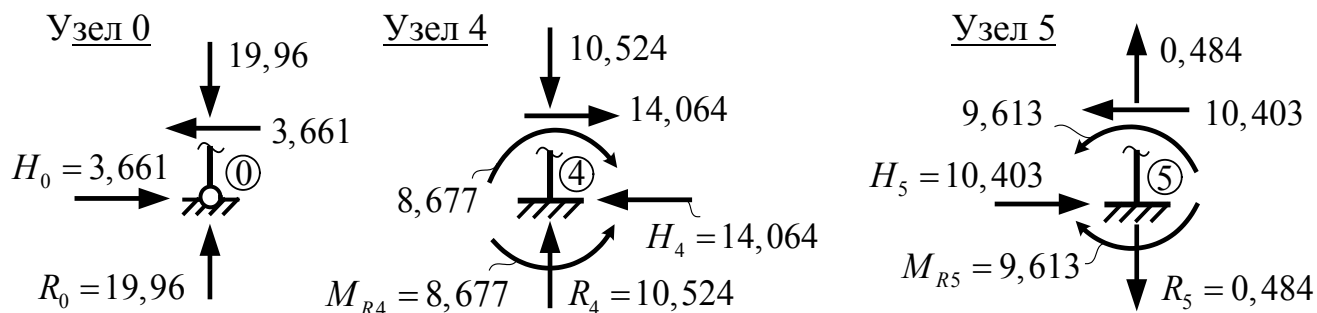




$$\Sigma X = 0; N_{12} = -3,661 \text{ кН}; \quad \Sigma X = 0; N_{23} = -5,597 \text{ кН}; \quad \Sigma X = 0; 5,597 - 5,597 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; N_{10} = -19,96 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; N_{24} = -10,524 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; N_{35} = 0,484 \text{ кН};$$

Вырезав опорные узлы, определим опорные реакции:



Статическая проверка:

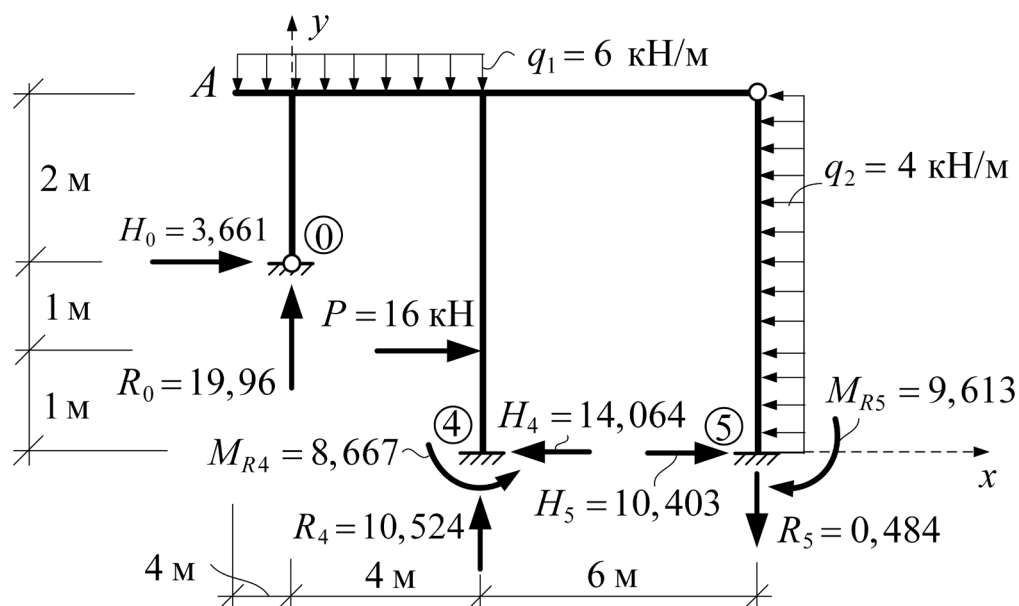


Рис. 17

$$\Sigma X = 0; \quad 3,661 - 14,064 + 10,403 - 4 \cdot 4 + 16 = 0; \quad 30,064 - 30,064 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 19,96 + 10,524 - 0,484 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 30,484 - 30,484 = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 16 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 3,661 \cdot 2 + 14,064 \cdot 4 - 10,403 \cdot 4 - \\ - 19,96 \cdot 1 - 10,524 \cdot 5 + 0,484 \cdot 11 - 8,667 + 9,613 = 0; \\ 178,193 - 178,191 \approx 0.$$

Все проверки выполняются. Расчет рамы выполнен верно.

## 11. УПРОЩЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТАХ СИММЕТРИЧНЫХ РАМ

**Симметричными** называют рамы, которые обладают симметрией относительно некоторой оси (оси симметрии) в конфигурации стержней, в расположении опорных связей и в жесткостях стержней.

При расчете симметричных рам методом перемещений следует применять и использовать те же подходы, приводящие к упрощениям, что и в методе сил.

Основная система метода перемещений при расчете симметричных рам должна удовлетворять всем условиям симметрии, включая разделение всех неизвестных перемещений на симметричные и кососимметричные. Неизвестные, не удовлетворяющие условиям симметрии, необходимо группировать. В результате система канонических уравнений метода перемещений распадется на две независимые системы, в одну из которых будут входить только симметричные, а во вторую – только кососимметричные неизвестные.

Если на раму при этом будет действовать симметричная внешняя нагрузка, то все кососимметричные (обратносимметричные) неизвестные, как и в методе сил, обратятся в нуль; если внешние нагрузки будут кососимметричны, то все симметричные неизвестные будут равны нулю.

Рассмотрим, например, симметричную раму, изображенную на рис. 18а, степень кинематической неопределимости которой равна пяти:

$$n = n_y + n_n = 2 + 3 = 5.$$

Основная система для этой рамы в общем случае представлена на рис. 18б, а с учетом группировки неизвестных:

$$\begin{cases} Z'_1 = Z_1 + Z_2; \\ Z'_2 = Z_1 - Z_2; \end{cases} \quad \begin{cases} Z'_4 = Z_4 + Z_5; \\ Z'_5 = Z_4 - Z_5; \end{cases} \quad Z'_3 = Z_3$$

на рис. 18в. В результате будем иметь два симметричных ( $Z_2, Z_4$ ) и три кососимметричных ( $Z_1, Z_3, Z_5$ ) неизвестных перемещения.

Общая система уравнений при этом распадается на две независимые системы вида

$$\begin{cases} r_{22} \cdot Z_2 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2P} = 0; \\ r_{42} \cdot Z_2 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4P} = 0; \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{15} \cdot Z_5 + R_{1P} = 0; \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{35} \cdot Z_5 + R_{3P} = 0; \\ r_{51} \cdot Z_1 + r_{53} \cdot Z_3 + r_{55} \cdot Z_5 + R_{5P} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

При симметричном нагружении рамы все кососимметричные неизвестные будут равны нулю, т.е.  $Z_1 = Z_3 = Z_5 = 0$ , останутся только симметричные неизвестные  $Z_2, Z_4$  и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 18г. Единичные эпюры изгибающих моментов при этом и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 18д–18з (построение эпюры  $\overline{M}_2$  на среднем участке нижнего стержня сразу от двух поворотов заделок навстречу друг другу показано на рис. 18и). Значения единичных коэффициентов в этом случае будут:

$$r_{22} = 10i_1 + 6i_2; \quad r_{24} = r_{42} = -\frac{6i_1}{a}; \quad r_{44} = \frac{6i_1}{a^2}.$$

При кососимметричной нагрузке на раму на рис. 18а все симметричные неизвестные станут равны нулю ( $Z_2 = Z_4 = 0$ ), останутся неизвестными перемещения  $Z_1, Z_3, Z_5$  и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 19а. Единичные эпюры изгибающих моментов и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 19в–19з. Построение эпюр  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_5$  на среднем нижнем стержне от одновременного поворота двух заделок по часовой стрелке и их смещения в противоположные стороны представлены на рис. 19б, 19и. Значения единичных реакций будут равны:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 18i_1 + 6i_2; & r_{13} &= r_{31} = -\frac{6i_2}{h}; & r_{15} &= r_{51} = \frac{18i_1}{a}; \\ r_{33} &= -\frac{6i_2}{h^2}; & r_{35} &= r_{53} = 0; & r_{55} &= \frac{54i_1}{a^2}. \end{aligned}$$

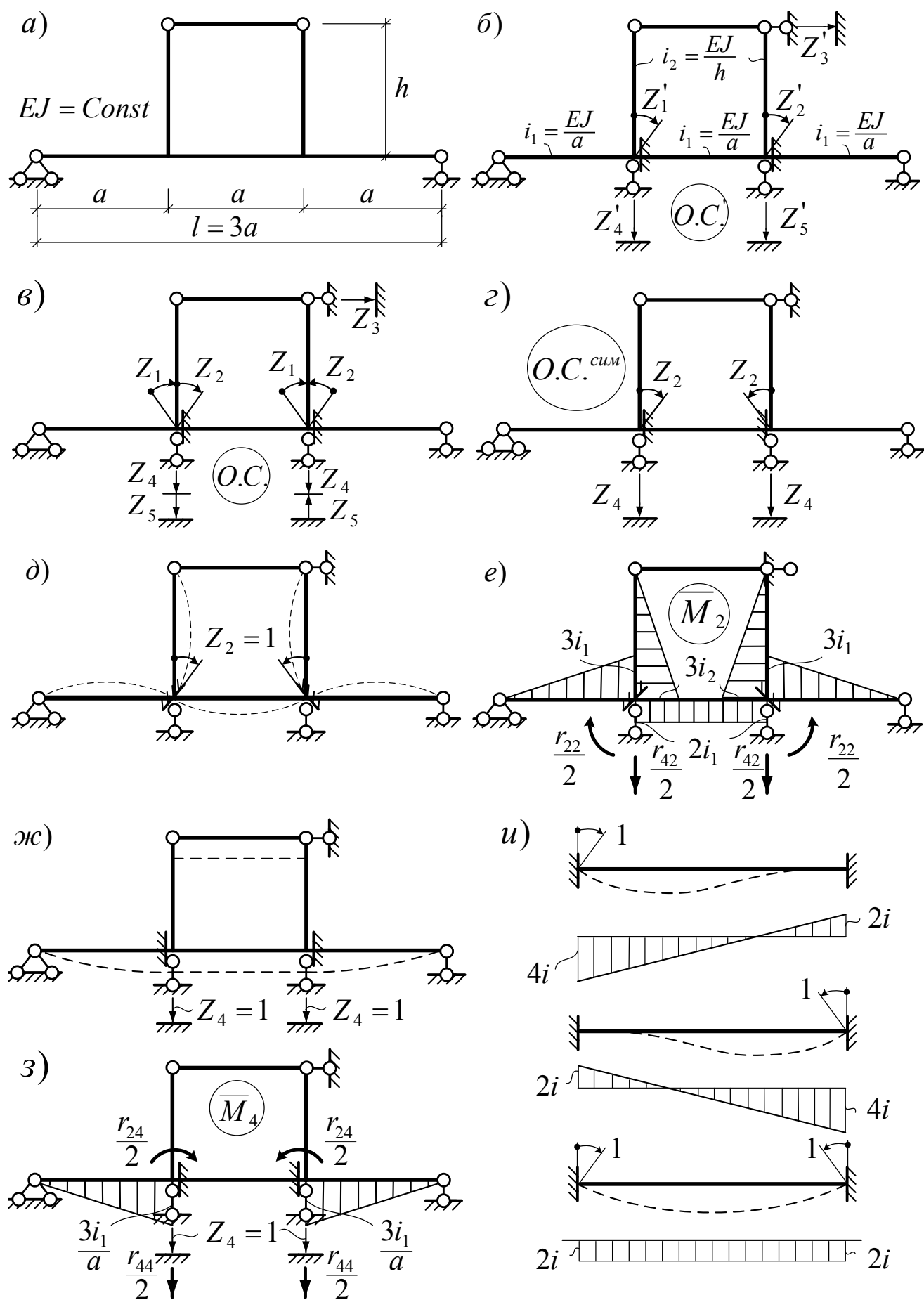


Рис. 18

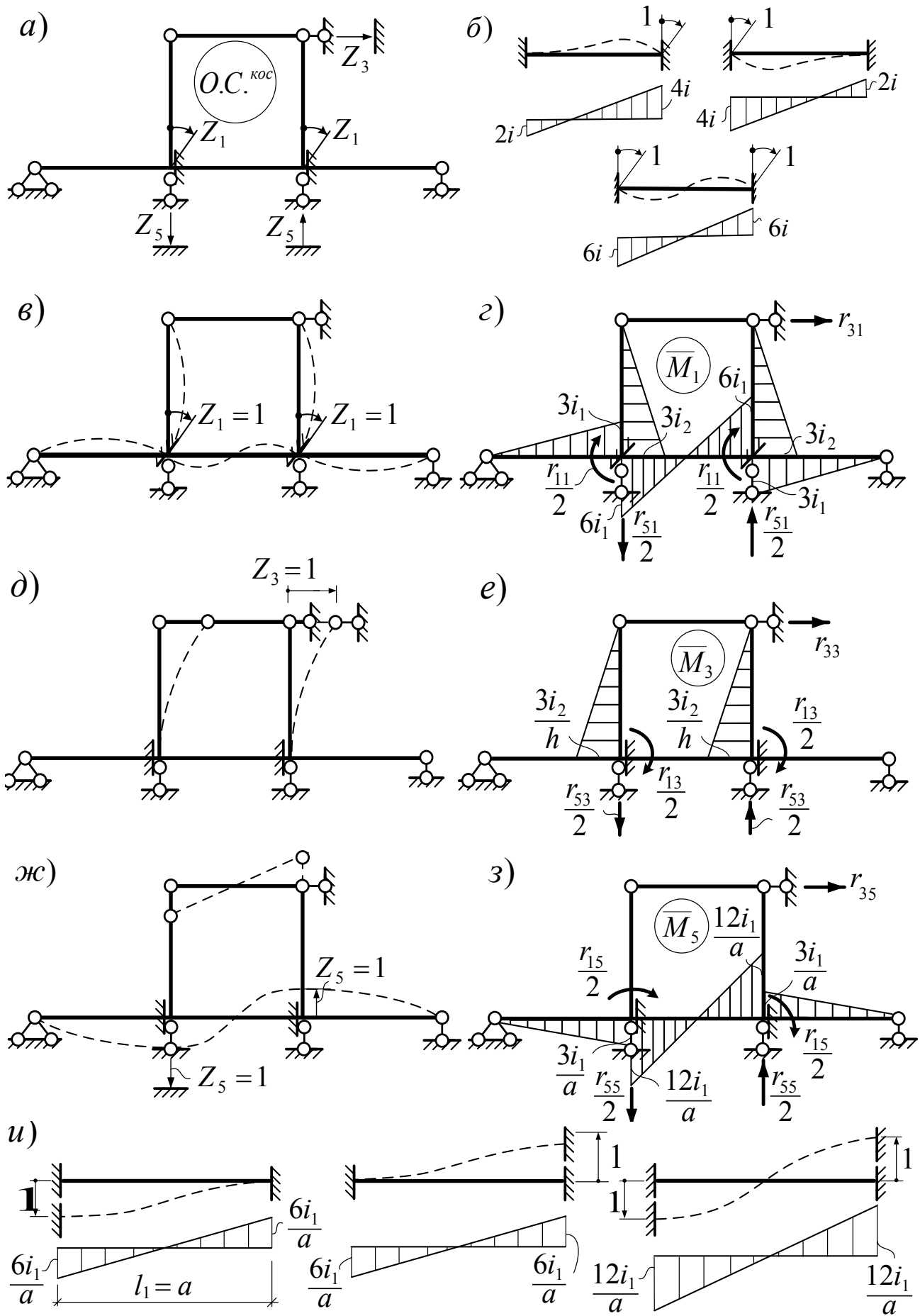


Рис. 19

Для симметричных рам при их симметричном нагружении эпюры усилий будут симметричными, а при кососимметричном их нагружении – кососимметричными. И если получить эпюры для половины рамы, то их можно просто отобразить на вторую половину соответственно нагрузке симметрично либо кососимметрично. Эпюры усилий для половины рамы можно построить на основе расчета половины рамы. При этом надо выбрать расчетную схему поло-

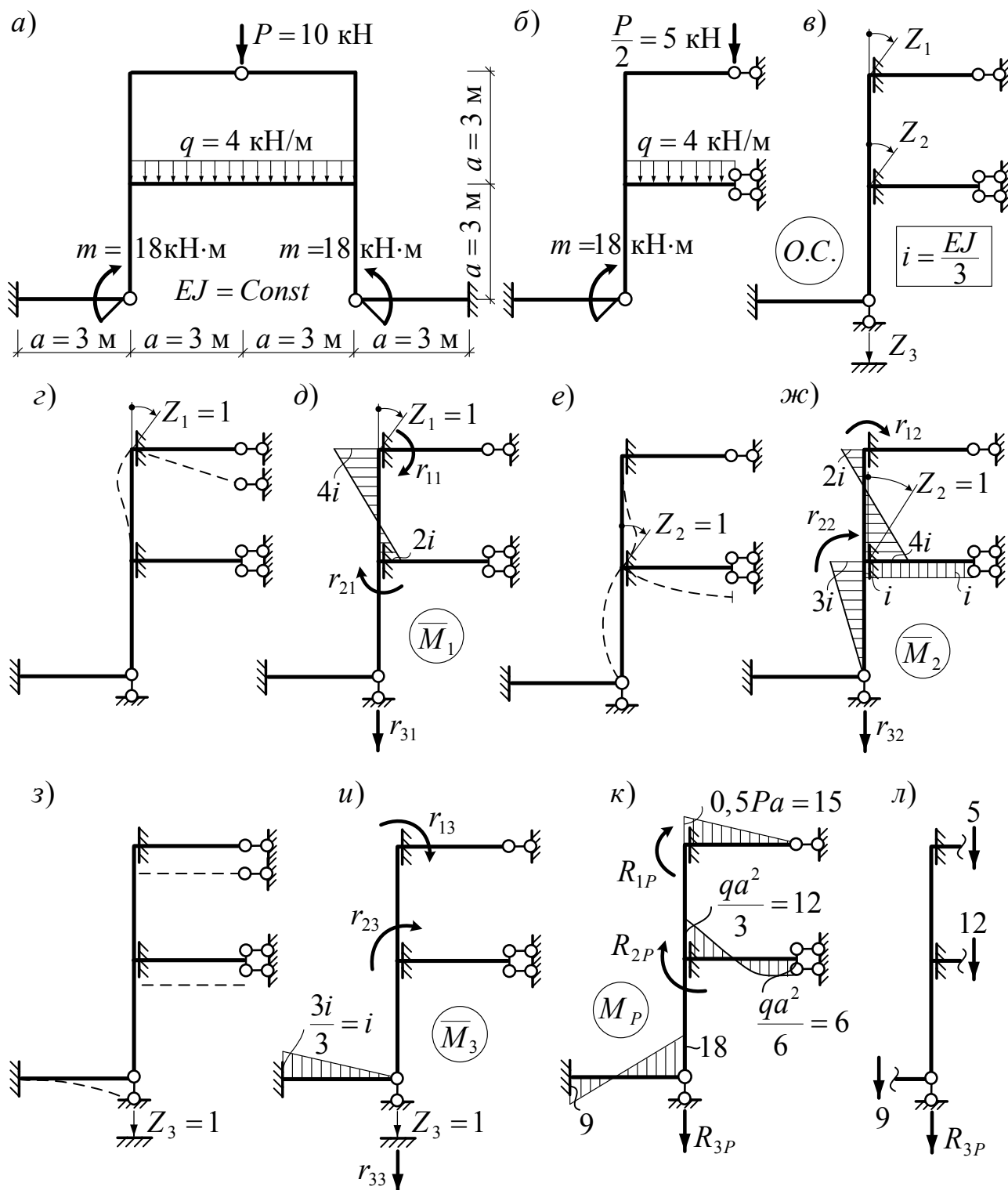


Рис. 20

вины рамы. Рама разрезается по оси симметрии и в соответствии с условиями деформирования полной рамы в местах разреза устанавливаются связи, закрепляющие сечения от тех перемещений, которых соответственно при симметричном либо кососимметричном деформировании рамы не может быть (подробно вопросы выбора расчетных схем половин рам обсуждались в работе [8] при рассмотрении расчетов симметричных рам методом сил). Далее выполняется обычный расчет полученной половины рамы методом перемещений.

Например, для симметричной рамы, представленной на рис. 20а, при ее симметричном нагружении расчетная схема половины рамы показана на рис. 20б. Степень кинематической неопределимости этой половины рамы равна трем ( $n = n_y + n_d = 2 + 1 = 3$ ). Основная система метода перемещений изображена на рис. 20в. На рис. 20г–20и представлены схемы деформирования расчетной схемы и эпюры изгибающих моментов в ней от воздействий единичных перемещений дополнительных связей  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Грузовая эпюра изгибающих моментов от действия внешних нагрузок показана на рис. 20к. Реактивные усилия в дополнительных связях от всех этих воздействий равны:

$$r_{11} = 4i; \quad r_{12} = r_{21} = 2i; \quad r_{13} = r_{31} = 0; \quad r_{22} = 8i; \quad r_{23} = r_{32} = 0;$$

$$r_{33} = 0,333i; \quad R_{1P} = -15; \quad R_{2P} = -12; \quad R_{3P} = -26 \text{ (рис. 20л).}$$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А.Борисевич, Е.М.Сидорович, В.И.Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.
2. Строительная механика / Под ред. А.В.Даркова. – М., 1976. – 600 с.
3. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. – М., 1986. – 608 с.
4. Довнар, Е.П. Строительная механика / Е.П.Довнар, Л.И.Коршун. – Минск, 1986. – 310 с.
5. Киселев, В.А. Строительная механика. Общий курс. – М., 1986. – 520 с.
6. Селюков, В.М. Расчетно-проектировочные работы по строительной механике. – Минск, 1989. – 204 с.
7. Руководство по практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / Под общ. ред. Г.К.Клейна. – М., 1980. – 384 с.
8. Методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной формы обучения: в 3 ч. – Ч. 2: Статически неопределимые системы. Метод сил / В.И. Игнатюк, С.В. Загуляев, В.В. Молош; УО «БрГТУ». – Брест, 2008. – 52 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений . . .	3
2. Определение степени кинематической неопределимости рам. ....	5
3. Основная система метода перемещений .....	7
4. Канонические уравнения метода перемещений .....	8
5. Табличные эпюры метода перемещений .....	10
6. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе метода перемещений .....	18
7. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений. ....	20
8. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	24
9. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки. ....	26
10. Пример расчета .....	27
11. Упрощения при расчетах симметричных рам .....	34
Рекомендуемая литература .....	39

### Учебное издание

Составитель: Игнатюк Валерий Иванович

Методические указания  
по дисциплине «Строительная механика»  
для студентов строительных специальностей  
заочной формы обучения

### Часть 3

Статически неопределимые системы. Метод перемещений

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Компьютерный набор и верстка Назарук С.И.

Корректор Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 05.01.2009 г. Формат 60×84/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 300 экз. Заказ № . Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.